

«Devo introdurre le frazioni ... Da dove comincio?»

Martha Isabel Fandiño Pinilla² e Bruno D'Amore^{1,2}

¹*Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá;*

²*NRD, Università di Bologna*

1. Introduzione

La ricerca didattica ha messo in evidenza nei decenni alcuni errori tipici degli studenti, errori che si ripetono in tutti i continenti. La ricerca li ha puntualmente e approfonditamente studiati. Riassumiamo qui i più importanti. Difficoltà: 1. Nel dare un ordine alle frazioni; 2. nelle operazioni tra frazioni e tra numeri razionali; 3. nel riconoscere gli schemi, anche quelli più diffusi; 4. nel gestire l'aggettivo "uguale" nel caso delle frazioni; 5. nel gestire equivalenze in generale; 6. nel gestire la riduzione ai minimi termini; 7. nel gestire figure considerate non standard; 8. nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata; 9. nel gestire autonomamente o spontaneamente schemi, figure o modelli. La ricerca ha evidenziato questi errori tipici e li ha classificati, ma quel che mancava era vedere come usare la moderna ricerca in Didattica della Matematica, intesa come *epistemologia dell'apprendimento*, nel caso specifico delle frazioni, basandosi sui risultati della ricerca durata più di 40 anni. Questa esigenza ci ha spinto a prendere i temi principali della ricerca in didattica della matematica e rivedere la ricerca precedente classica sulle frazioni da questa angolazione, cercando anche motivazioni didattiche e non solo matematiche per capire il senso di tali "errori tipici". Ci limiteremo qui a pochi esempi.

2. Contratto didattico

(a) La "somma" di frazioni: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ non è proposta dallo studente all'insegnante perché lo studente la ritiene vera, ma perché ha l'aspetto di qualche cosa che ha un aspetto che all'insegnante potrebbe anche andare bene, avendo una forma accettabile ... Tranne quando appaiono cose ... strane, come lo zero o riduzioni fra numeratore e denominatore inattese.

(b) Dato un problema sulle frazioni, al momento di decidere quale operazione deve essere eseguita, è un'illusione pensare che lo studente ragioni per scegliere, quando sappiamo che, per contratto, egli ha come scopo solo quello di cogliere un cenno di approvazione; e così proporrà a raffica consecutivamente anche proposte tra loro contraddittorie. L'apparente assurdità (in matematica) della successione delle proposte acquista così una sua logica (in didattica).

(c) Difficoltà nell'accettare i risultati di operazioni, risultati considerati "assurdi" ($10\frac{1}{2}$, $100\frac{1}{4}$).

Gli studi sul contratto didattico hanno null'altro che messo in evidenza situazioni che, implicitamente, erano sotto gli occhi di tutti, ma non chiaramente capite ed espresse. Nelle frazioni la cosa è parecchio evidente e ricorrente: lo studente rinuncia a osare, rinuncia a farsi carico personale del proprio apprendimento e tende ad agire contrattualmente.

3. Eccesso di rappresentazioni semiotiche

Nel caso delle frazioni, la quantità di registri semiotici messi in gioco è immensa: basta aprire un libro di testo qualsiasi. A gestire i diversi registri, a scegliere i tratti distintivi del concetto da trattare, a convertire, non si impara *automaticamente*; questo apprendimento deve necessariamente essere il risultato di un insegnamento esplicito nel quale l'insegnante deve chiamare a essere corresponsabile lo studente. Alcuni insegnanti talvolta sottovalutano questo aspetto e passano da un registro all'altro, convinti che gli studenti li seguano; occorre ricordare sempre le cautele suggerite dagli studi di Raymond Duval. L'insegnante può permettersi di saltare da un registro all'altro senza problemi, perché ha già concettualizzato, ma lo studente, no, lo studente lo segue sul piano dei rappresentanti semiotici, non sui significati.

4. Immagini e modelli troppo presto formati

Nel caso delle frazioni, succede molto spesso che un'immagine si trasformi in modello (mentale) interno, troppo presto, quando ancora dovrebbe restare immagine. Vediamo alcuni esempi.

(a) L'immagine di una unità-tutto che viene divisa in parti *uguali*, intendendo questo *uguale* come identità, congruenza, sovrapponibilità, marchio in modo efficace e duraturo il concetto di frazione, trasformandosi in modello e pretendendo dunque di essere rispettata in ogni occasione. Questo fatto, assai ricorrente, pregiudica l'apprendimento significativo della frazione.

(b) L'immagine di dividere un'unità-tutto in parti uguali e prenderne alcune, suggerisce semanticamente che questo "alcune" non possa essere "tutte"; il modello si forma facilmente, dato che coincide con una intuizione forte; ma pregiudica poi il passaggio alla unità come frazione n/n e alle frazioni improprie.

(c) L'uso di figure geometriche viene visto dagli studenti come specifico e significativo, mentre l'adulto le pensa casuali e le vede come scelte generiche. Per esempio, il continuo e unico ricorso a rettangoli o quadrati costringe a ragionare in modo tale che l'immagine (che avrebbe dovuto essere aperta, duttile, modificabile) diventa invece persistente e stabile e si fa modello; se la frazione viene proposta su figure diverse lo studente non domina più la noetica della frazione perché la situazione proposta non fa parte del suo modello.

5. Misconcezioni

Gli esempi possibili di misconcezioni nel caso delle frazioni sono molteplici. Moltissimi degli esempi visti fino a ora sono ascrivibili a misconcezioni che gli studenti si sono fatti e che sono diventate modello troppo presto, quando ancora dovevano restare immagini. Ricordiamo le misconcezioni legate all'ordine tra frazioni, ordine desunto a partire da quello tra numeri naturali; alla semplificazione di frazioni; alla gestione della equivalenza tra frazioni; alle operazioni tra frazioni; alla scelta delle figure sulle quale operare con le frazioni;

6. Ostacoli ontogenetici, didattici e epistemologici

Tra gli apprendimenti legati alle frazioni, molti possono essere pensati come veri e propri ostacoli epistemologici. Essi sono facilmente riconoscibili nella storia e/o nella pratica didattica.

- (a) La riduzione delle frazioni ai minimi termini è stata per molto tempo un oggetto specifico di studio nella storia; basti pensare che gli Egizi, che coltivarono le frazioni per molti secoli, preferirono avere a che fare solo con frazioni con numeratore unitario.
- (b) Il passaggio dalle frazioni ai numeri con la virgola ha richiesto alla matematica più di 4500 anni.
- (c) La gestione dello zero nelle frazioni ha creato difficoltà enormi nella storia, facendo vittime illustri anche tra matematici famosi.

7. Eccesso di situazioni didattiche e mancanza di situazioni a-didattiche

Le situazioni che taluni insegnanti propongono per l'apprendimento delle frazioni sono per lo più didattiche, mentre assai poco spesso si ricorre a situazioni a-didattiche, con il risultato che l'intera letteratura internazionale evidenzia: il fallimento quasi totale nell'apprendimento delle frazioni e dei numeri razionali. Tutti sappiamo oggi che la costruzione di apprendimento significativo dovrebbe passare attraverso situazioni a-didattiche, ma che queste non sono certo quelle più utilizzate nella pratica didattica, mentre dovrebbero esserlo.

Bibliografia

- Fandiño Pinilla, M.I. (2021). *Le frazioni: Matematica, storia e didattica*. Pitagora. [Nuova edizione: (2023), Bologna: Bonomo].
- Fandiño Pinilla, M.I., & Pedagogica-Locarno, A.A.S. (2005). *Le frazioni: aspetti concettuali e didattici*. Pitagora.

Parole chiave: frazioni; epistemologia dell'apprendimento; contratto didattico.